TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 268, Number 2, December 1981

LES MODELES DENOMBRABLES D'UNE THEORIE AYANT DES FONCTIONS DE SKOLEM

BY

DANIEL LASCAR

ABSTRACT. Let T be a countable complete theory having Skolem functions. We prove that if all the types over finitely generated models are definable (this is the case for example if T is stable), then either T has $2^{\aleph_0}$ countable models or all its models are homogeneous. The proof makes heavy use of stability techniques.

Introduction. Le but de cet article est de rendre plausible la conjecture suivante:

CONJECTURE. *Soit T une théorie dénombrable ayant des fonctions de Skolem, et supposons que T a un modèle dénombrable non homogène. Alors T a $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables.*

Cette conjecture est évidemment liée aux conjectures de Vaught [V] et de Martin. A partir de maintenant, nous supposerons que T a des fonctions de Skolem.

Shelah [S2] a montré que s'il y a un ordre total définissable dans T, alors T a $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables. A l'autre bout, dans [L3] on esquisse la démonstration de la conjecture pour T superstable. En fait, peu de changements sont nécessaires pour obtenir la démonstration pour T stable (Propositions 4.3 et 4.4 de cet article), et même pour toute théorie satisfaisant aux conditions (1) et (2) suivantes (qui sont évidemment vraies si T est stable).

Condition (1). Tout type sur tout modèle finiment engendré est définissable.

Condition (2). Si M est un modèle finiment engendré, a et b des suites dans une extension élémentaire de M, et si $t(a/M[b])$ est l'héritier de $t(a/M)$, alors $t(b/M[a])$ est l'héritier de $t(b/M)$. (Voir §1 pour les notations et définitions.)

En fait, on a encore mieux puisque dans §7, on montre que si T satisfait à la première condition et a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles, alors T satisfait à la seconde condition. On démontre donc la conjecture de Vaught (et aussi la conjecture de Martin) pour les théories avec fonctions de Skolem et satisfaisant à la condition (1).

§§2–6 sont consacrées à la démonstration de la conjecture lorsque T satisfait aux conditions (1) et (2). Deux outils essentiels seront utilisés: le rang de Cantor-Bendixson, qui est exposé dans §2. En fait, nous ne faisons que reprendre les lemmes de [L1], où une autre utilisation de ce rang étant faite.

D'autre part, étant donné un modèle M nous considèrerons les extensions élémentaires propres et minimales de M, ou plus exactement les types de la forme $t(a/M)$ où le modèle engendré par M et a est une telle extension. Ces types (les R.

Received by the editors March 7, 1980.
1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 03C15; Secondary 03C45, 03C50.

K. minimaux) constituent le second outil et sont étudiés dans §3. Cette notion est reliée à la notion de types réguliers (regular types) de Shelah **[S1**, Chapitre V].

Dans la section suivante, on montre que toute extension finiment engendrée de M peut s'obtenir à l'aide d'une chaîne élémentaire finie, chaque élément de la chaîne étant minimal au-dessus du précédent. C'est dans §5 qu'on construit $2^{\aleph_0}$ modèles de T si T a un modèle dénombrable non homogène. En fait, dans cette section nous supposerons l'existence d'un modèle non homogène très particulier. Il ne nous reste plus, dans §6, qu'à montrer que l'existence d'un modèle dénombrable non homogène entraîne l'existence de ce type de modèle.

En plus de connaissances générales de théorie des modèles, on supposera connus les résultats de [**LP**] essentiellement §§2, 3 et 4.

1. Notations et préliminaires. Nous considèrerons dans cet article une théorie T dénombrable ayant des fonctions de Skolem. Donc toute sous-structure d'un modèle en est une restriction élémentaire. Par conséquent, toutes les structures dont nous parlerons seront des modèles de T, et toutes les injections des injections élémentaires.

Si A est un sous-ensemble quelconque d'un modèle M' et $M \prec M'$, on notera $M[A]$ le sous-modèle engendré par $A \cup M$. Quelquefois, le modèle M' n'a pas d'importance, et nous nous dispenserons de le mentionner. On écrira $M[a]$ et $M[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ plutôt que $M[\{a\}]$ et $M[\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}]$. Par modèle de type fini, nous désignons un modèle de la forme $M_0[A]$ où A est fini et où M_0 est le modèle premier de T. *Dans tout cet article*, M *désignera un modèle de type fini*, alors que $M', N, \ldots$ désigneront des modèles quelconques de T. Remarquons de suite que s'il y a $2^{\aleph_0}$ extensions dénombrables de M, deux à deux non M-isomorphes, T a $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables.

Le type d'un élément ou d'une suite finie a sur un modèle N est dénoté par $t(a/N)$. On notera $S_n(N)$ l'ensemble des n-types sur N, et on écrira $S(N)$ si on ne désire pas préciser le nombre de variables des types considérés. Remarquons que se donner le type d'un élément sur un ensemble est équivalent à se donner son type sur le modèle que cet ensemble engendre. Si $p \in S(N)$ on note $N[p]$ le modèle (défini à N-isomorphismes près) $N[a]$, où le type de a sur N est précisément p. Si ϕ est une formule à paramètres dans N, $\phi[N]$ est l'ensemble $\{a \in N;\ N \models \phi(a)\}$. Si $N \prec N'$, et $p \in S(N')$, $p \restriction N$ est la restriction de p à N.

Nous supposerons dans tout cet article que T satisfait à la condition suivante:

(0) Pour tout $n > 0$, $S_n(T)$ est dénombrable.

Il est clair que toute théorie ayant moins de $2^{\aleph_0}$ modèles la verifie, et par conséquent cette hypothèse est gratuite. D'autre part, elle entraîne que pour tout modèle M de type fini, $S_n(M)$ est aussi dénombrable. Ceci reste vrai pour tout modèle M' inclus dans un modèle de type fini.

Nous allons maintenant rappeler très rapidement les notions et principales propriétés dont nous aurons besoin:

1.1. DÉFINITION. *Soient* $N \prec N', p \in S(N)$ *et* p' *une extension de* p *sur* N'.

(1) On dit que p' est *héritier* de p si pour toute formule $\phi(v_0, \bar{v})$ à paramètres dans N et pour tout $\bar{a}'$, suite finie de N' de longueur convenable, si $\phi(x, \bar{a}') \in p'$, alors il existe une suite $\bar{a}$ de N telle que $\phi(x, \bar{a}) \in p$.

(2) On dit que p' est *cohéritier* de p si pour toute formule $\phi(v_0, \bar{v})$ à paramètres dans N et $\bar{a}'$ suite de N' telle que $\phi(x, \bar{a}) \in p'$, il existe $b \in N$ tel que $N' \models \phi(b, \bar{a}')$.

Alors

1.2. Proposition. *Soient a et b dans une extension élémentaire de N; alors $t(a/N[b])$ est héritier de $t(a/N)$ si et seulement si $t(b/N[a])$ est cohéritier de $t(b/N)$.*

Nous renvoyons à **[LP]** pour les propriétés d'existence et de transitivité des héritiers et cohéritiers. Remarquons que si $p \in S(N)$ n'est pas réalisé dans N (c'est-à-dire que $x = a$ n'appartient à p pour aucun élément a de N) et si p' est héritier ou cohéritier de p sur $N' \succ N$, alors p' n'est pas réalisé dans N'.

La proposition suivante nous sera très souvent utile:

1.3. Proposition. *Soient $N \prec N'$, $\phi(v)$ une formule à paramètres dans N, $p \in S_1(N')$ et supposons que $\phi[N'] = \phi[N]$ et $\phi(x) \in p$. Alors p est cohéritier de $p \restriction N$.*

Démonstration. Supposons que a' est une suite finie de N' et que $\psi(x, a) \in p$. Alors $N' \models \exists v[\phi(v) \cap \psi(v, a')]$ (parce que p est consistant), et si b est un élément de N' tel que $\phi(b) \wedge \psi(b, a')$, alors $b \in N$. ■

1.4. Définition. *Soit $p \in S(N)$. On dit que p est définissable si pour toute formule $\phi(x, \bar{v})$ il existe une formule $\psi(\bar{v})$ à paramètres dans N telle que pour toute suite $\bar{a}$ de N de longueur convenable $\phi(x, \bar{a}) \in p$ si et seulement si $N \models \psi(a)$.*

On démontre qu'un type sur N est définissable si et seulement s'il n'a qu'un seul héritier sur toute extension de N.

Dans tout cet article, nous supposerons que la condition (1) de l'introduction est vérifiée.

1.5. Définition. Soit $p \in S(N)$. On dit que p est à *support fini* s'il existe $M \prec N$, M de type fini tel que p est l'héritier de $p \restriction M$.

On voit facilement que si p est à support fini, p est définissable.

Lorsque nous supposerons la condition (2) vérifiée (c'est-à-dire dans §3 après le paragraphe 3.14, et §§4, 5 et 6) nous emploierons le langage habituel en stabilité: si $t(a/M[b])$ est héritier de $t(a/M)$ on dira que a et b sont M-indépendants (ou indépendants au-dessus de M). Soient $M \prec N$ et a dans une extension élémentaire de N: alors $t(a/N)$ est héritier (cohéritier) de $t(a/M)$ si et seulement si pour tout $A \subset N$, A fini $t(a/M[A])$ est héritier (cohéritier) de $t(A/M)$. Donc, présence de (2), $p \in S(N)$ est héritier de $p \restriction M$ si et seulement s'il en est cohéritier. Dans ce cas, on dira que p ne bifurque pas sur M. On remarque aussi que les héritiers d'un type à support fini en sont des cohéritiers.

Nous utiliserons très souvent sans le mentionner le lemme suivant:

1.6. Lemma. *Soient a et b M-indépendants, et supposons que $t(c/M[a, b])$ est l'héritier de $t(c/M[a])$. Alors b et c sont M-indépendants.*

Démonstration. Par symétrie on voit que $t(b/M[a, c])$ est héritier de $t(b/M[a])$ et par transitivité qu'il est héritier de $t(b/M)$. Il en découle que $t(b/M[c])$ est héritier de $t(b/M)$.

Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble (ou une suite) de suites finies prises dans une extension de M. On dira que A est M-indépendant si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t(a_i/M[a_j;\ 1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i])$ est l'héritier de $t(a_i/M)$. Une utilisation répétée du lemme précédent montre que si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t(a_i/M[a_j;\ j < i])$ ne bifurque pas au-dessus de M, alors l'ensemble A est M-indépendant. Par définition, un ensemble, non nécessairement fini, est M-indépendant si tout ses sous-ensembles finis le sont.

Remarquons que si, pour tout entier i, $t(a_i/M) = p$ et que l'ensemble $\{a_i;\ i \in \omega\}$ est M-indépendant, alors il est indiscernable au-dessus de M. Etant donné $p \in S(M)$, on peut donc construire une suite $(a_i;\ i \in \omega)$ totalement indiscernable, en exigeant, par récurrence sur i que $t(a_i/M[a_j; j < i])$ soit l'héritier de p. Une telle suite sera appelée suite de Morley au-dessus de M.

Si $(p_i,\ i \in I)$ est une famille de type sur M et $i \to n(i)$ une application de I dans ω, $M[p_i^{n(i)},\ i \in I]$ désigne le modèle, défini à M-isomorphisme près, $M[a_i^j;\ i \in I,\ 1 \leqslant j \leqslant n(i)]$, où $t(a_i^j/M) = p_i$ pour $i \in I$ et $j \in \omega$ et où l'ensemble $\{a_i^j;\ i \in I,\ 1 \leqslant j \leqslant n(i)\}$ est M-indépendant.

2. Le rang de Cantor-Bendixson.

2.1. Définition. *Soit $\mathfrak{U}$ un espace topologique. Nous définissons par induction sur les ordinaux α les fermés $D^\alpha(\mathfrak{U})$ de $\mathfrak{U}$.*

$D^0(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$.

$D^{\alpha+1}(\mathfrak{U})$ *est l'ensemble des points non isolés de* $D^\alpha(\mathfrak{U})$.

Si δ est un ordinal limite, $D^\delta(\mathfrak{U}) = \bigcap_{\alpha<\delta} D^\alpha(\mathfrak{U})$.

Si $x \in D^\alpha(\mathfrak{U})$, on écrira $\mathrm{CB}(x) \geqslant \alpha$, et on dira que le rang de Cantor-Bendixson de x est supérieur ou égal à α; il sera égal à α si $x \in D^\alpha(\mathfrak{U}) - D^{\alpha+1}(\mathfrak{U})$. Si $x \in D^\alpha(\mathfrak{U})$ pour tout ordinal α, alors on écrira $\mathrm{CB}(x) = \infty$. Sinon $\mathrm{CB}(x) < \infty$.

Nous utiliserons ces définitions au cas où $\mathfrak{U}$ est un espace de type $S_n(M)$; si a est un élément ou une suite finie dans une extension élémentaire de M, $\mathrm{CB}(a/M)$ est $\mathrm{CB}(t(a/M))$, ce rang étant pris dans l'espace $S(M)$ considéré. Pour $p \in S(M)$, dire que $\mathrm{CB}(p) = \alpha$ veut dire que $p \in D^\alpha(S(M))$ et qu'il existe une formule $\phi(x)$ contenue dans p, et telle que p est le seul type de rang au moins α contenant ϕ; on dira qu'une telle formule isole p.

2.2. Si $\mathfrak{U}$ est un espace compact et dénombrable (ou fini, mais non vide), on sait qu'il y a des points isolés dans $\mathfrak{U}$, et de plus, pour tout α, $D^\alpha(\mathfrak{U})$ reste compact, et de cardinalité au plus $\aleph_0$. Par conséquent si $D^\alpha(\mathfrak{U})$ n'est pas vide, $D^{\alpha+1}(\mathfrak{U}) \neq D^\alpha(\mathfrak{U})$, et il existe un ordinal dénombrable β tel que $\mathrm{CB}(x) < \beta$, pour tout $x \in \mathfrak{U}$.

Ceci s'applique en particulier aux espaces $S_n(M)$, mais ceci reste vrai pour $S_n(M')$ si M' est inclus dans un modèle de type fini.

Dans les propositions qui suivent, a et b sont des suites finies prises dans une extension de M. Cependant, pour éviter d'ennuyeuses notations, nous ferons comme s'il s'agissait d'éléments.

2.3. Proposition. *Supposons $b \in M[a]$. Alors* $\mathrm{CB}(a, b/M) \leqslant \mathrm{CB}(a/M)$.

Démonstration. Nous allons montrer par induction sur α que $\mathrm{CB}(a, b/M) \geqslant \alpha$ implique $\mathrm{CB}(a/M) \geqslant \alpha$.

Pour $\alpha = 0$ et α limite, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $\mathrm{CB}(a, b/M) \geq \alpha + 1$, et soit $\phi(x)$ une formule à paramètres dans M appartenant à $t(a/M)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $p \in S_1(M)$, contenant $\phi(x)$ différent de $t(a/M)$ et de rang au moins α.

Nous savons qu'il existe un terme f à paramètres dans M tel que $f(a) = b$. Considérons la formule $\phi(x_0) \wedge f(x_0) = x_1$, qui appartient à $t(a, b/M)$. Elle appartient donc aussi à d'autre type de rang au moins α. Soient donc a' et b' tels que $\phi(x_0) \wedge f(x_0) = x_1 \in t(a', b'/M) \neq t(a, b/M)$ et $\mathrm{CB}(a', b'/M) \geq \alpha$.

Alors $b' \in M[a]$ et par hypothèse d'induction, $\mathrm{CB}(a'/M) \geq \alpha$; il est d'autre part évident que $t(a'/M) \neq t(a/M)$, car sinon $t(a', f(a')/M) = t(a', b'/M)$ serait égal à $t(a, f(a)/M) = t(a, b/M)$. ■

2.4. Proposition. $\mathrm{CB}(a, b/M) \geqslant \mathrm{CB}(a/M) + \mathrm{CB}(b/M[a])$.

Démonstration. Nous montrerons par induction sur α que $\mathrm{CB}(b/M[a]) \geq \alpha$ implique $\mathrm{CB}(a, b/M) \geqslant \mathrm{CB}(a/M) + \alpha$.

Pour $\alpha = 0$ et α limite, il n'y a qu'à utiliser la définition de la somme ordinale. On supposera donc $\mathrm{CB}(b/M[a]) \geqslant \alpha + 1$; soit $\phi(x_0, x_1)$ une formule contenue dans $t(a, b/M)$. Nous allons trouver un type autre que $t(a, b/M)$ contenant cette formule et de rang au moins $\mathrm{CB}(a/M) + \alpha$. Nous voyons que $\phi(a, x) \in t(b/M[a])$, et par conséquent, on peut trouver un point b' tel que $\phi(a, x) \in t(b'/M[a]) \neq t(b/M[a])$ et $\mathrm{CB}(b'/M[a]) \geqslant \alpha$. Par hypothèse d'induction $\mathrm{CB}(a, b'/M) \geqslant \mathrm{CB}(a/M) + \alpha$, et $t(a, b'/M)$ satisfait à nos exigences. ■

Corollaire. $\mathrm{CB}(a, b/M) \geqslant \mathrm{CB}(a/M)$ *et* $\mathrm{CB}(a, b/M) = \mathrm{CB}(a/M)$ *implique* $b \in M[a]$.

2.5. Proposition. *Soit* $b \in M[a]$; *alors*

(1) $\mathrm{CB}(b/M) \leqslant \mathrm{CB}(a/M)$;

(2) *si* $\mathrm{CB}(b/M) = \mathrm{CB}(a/M)$ *alors* $M[a] = M[b]$.

Démonstration. (1) Il est d'abord évident que $\mathrm{CB}(a, b/M) = \mathrm{CB}(b, a/M)$ car il y a un homéomorphisme de $S_2(M)$ qui envoie $t(a, b/M)$ sur $t(b, a/M)$. Donc par les Propositions 2.3 et 2.4: $\mathrm{CB}(a/M) \geqslant \mathrm{CB}(a, b/M) \geq \mathrm{CB}(b/M)$.

(2) Si $\mathrm{CB}(a/M) = \mathrm{CB}(b/M)$, alors on a aussi $\mathrm{CB}(a, b/M) = \mathrm{CB}(b/M)$ et $a \in M[b]$. ■

3. L'ordre de Rudin-Keisler. Nous reprenons ici la définition de l'ordre R. K. (d'après Rudin-Keisler; l'ordre de Rudin-Keisler est un ordre sur les ultrafiltres dont la définition suivante est une généralisation). Cet ordre a été introduit et étudié dans **[L2]**.

3.1. Définition. *Soient p et q deux types à un nombre fini de variables (non nécessairement le même) sur un modèle N. On dit que q est R. K.-supérieur à p ($q \geqslant p$ dans cet article) si p est réalisé dans $N[q]$.*

Si $p \geqslant q$ et $q \geqslant p$, on dira que p et q sont *R. K.-équivalents* et on écrira $p \sim q$.

On voit que la relation $\geqslant$ est en réalité une relation de préordre et elle induit un ordre sur les classes d'équivalence modulo $\sim$. Grâce aux résultats de la section précédente, il est clair que si $p \geqslant q$, alors $CB(p) \geqslant CB(q)$. Si p et q sont comparables pour l'ordre R. K., et si $\infty > CB(p) = CB(q)$, alors $p \sim q$. De plus, si $CB(p) < \infty$, $p \sim q$ si et seulement si $N[p]$ est N-isomorphe à $N[q]$.

3.2. DÉFINITION. *On dit que $p \in S(N)$ est R. K.-minimal si p n'est pas algébrique et est minimal pour l'ordre R. K. parmi les types sur N non algébriques.*

On vérifie sans peine que si $CB(p) < \infty$, p est R. K.-minimal si et seulement si $N[p]$ est une extension propre de N et il n'existe pas de modèle intermédiaire strictement entre N et $N[p]$.

3.3. Les types réguliers ont été étudiés par Shelah **[Sl**, Chapitre V]. Nos hypothèses très fortes et la modestie de notre but nous permettent un maximum de simplification.

DÉFINITION. *Soient $p \in S_1(N)$ et $\phi(v_0)$ une formule à paramètres dans N. On dit que (p, ϕ) est régulier si $\phi(x) \in p$ et si pour tout $a \in N[p] - N$ tel que $N[p] \models \phi(a)$, on a $t(a/N) = p$.*

3.4. PROPOSITION. *Soient $p \in S_1(M)$, donc de rang de Cantor-Bendixson non infini, et ϕ la formule isolant p. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) p est R. K.-minimal.

(2) (p, ϕ) est régulier.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $a \in M[p] - M$; alors $M[a] = M[p]$ et donc $CB(p) = CB(a/M)$. Donc si de plus $\phi(x) \in t(a/M)$, on doit avoir $t(a/M) = p$ et p est régulier.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit $b \in M[p]$ dont le type au-dessus de M est précisément p, et supposons, pour obtenir une contradiction, qu'il existe $a \in M[p] - M$ tel que $M[a] \neq M[b]$.

On voit alors que $CB(a/M) < CB(p)$, et donc que p n'est pas réalisé dans $M[a]$, et puisque (p, ϕ) est régulier, $\phi[M(a)] \subseteq M$; par conséquent (Proposition 1.3) $t(b/M[a])$ est le cohéritier de $t(b/M)$, et $t(a/M[b])$ est l'héritier de $t(a/M)$. Mais nous avons une contradiction puisque $a \in M[b]$ et $a \notin M$. ■

3.5. PROPOSITION. *Soient $M \prec M'$, $p \in S_1(M)$, p' l'héritier de p sur M'. Supposons (p, ϕ) régulier. Alors (p', ϕ) est régulier.*

DÉMONSTRATION. Nous savons que pour toute formule $\psi(x, \bar{v}_n)$, il existe une formule $d(\psi)(\bar{v}_n)$, à paramètres dans M, telle que, pour toute $\bar{a} \in M^n$, $\psi(x, \bar{a}) \in p$ si et seulement si $M \models d(\psi)(\bar{a})$. Puisque p' est l'héritier de p, on a de même pour toute $\bar{a} \in M'^n$, $\psi(x, \bar{a}) \in p'$ si et seulement si $M' \models d(\psi)(\bar{a})$.

Soient $f(v_0, \bar{v})$ un terme et $\psi(v_0, \bar{v}')$ une formule. Alors pour tout $\bar{m}$ et $\bar{m}'$, suites d'éléments de M de longueur convenable, il existe m_1 dans M tel que $\phi(f(x, \bar{m})) \in p$ implique $(f(x, \bar{m}) = m_1) \in p$ ou bien $(\psi(x, \bar{m}') \leftrightarrow \psi(f(x, \bar{m}), \bar{m}')) \in p$. (Ici on utilise le fait que (p, ϕ) est régulier.) Ceci se traduit par

$$M \models \forall \bar{v}, \bar{v}' \exists v_1 \big[d(\phi(f(x, \bar{v})) \Rightarrow \big[d(f(x, \bar{v})) = v_1) \\ \vee d(\psi(x, \bar{v}') \leftrightarrow \psi(f(x, \bar{v}), \bar{v}'))\big]\big].$$

Ces mêmes formules sont vraies dans M' et ceci implique que (p', ϕ) est régulier. ■

3.6. PROPOSITION. *Soient $p \in S(M)$, $M' \succ M$ et p' l'héritier de p sur M'. Si p' est R. K.-minimal, alors p l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Soient a dont le type sur M' est p', et $b \in M[a] - M$. Pour un certain terme f à paramètres dans M, $b = f(a)$.

D'autre part, il est clair que $t((a, b)/M')$ est l'héritier de $t((a, b)/M)$, et de même $t(b/M')$ est l'héritier de $t(b/M)$. Donc $b \notin M'$ et si l'on suppose que p' est minimal, il existe un terme g et une suite $\overline{m}'$ dans M' tels que $a = g(\overline{m}', b)$. Il en découle qu'une telle suite peut être trouvée dans M et $a \in M[b]$. ■

On déduit de 3.4, 3.5 et 3.6:

COROLLAIRE. *Soient $p \in S(M)$, et p' son héritier sur $M' \succ M$; alors p est R. K.-minimal si et seulement si p' l'est.*

3.7. Nous allons voir que la non R. K.-équivalence pour les types R. K.-minimaux est une propriété très forte.

DÉFINITION. *Soient p et q deux types sur N; on dit que p et q sont orthogonaux si $p(x) \cup q(y)$ est un type complet.*

La relation d'orthogonalité est clairement symétrique. On peut aussi l'exprimer en disant que p n'a qu'une seule extension sur $N[q]$. Si N est de type fini, cela revient à dire que, pour tout a, b réalisant, respectivement, p et q, $t(a/N[b])$ est l'héritier de $t(a/N)$.

Par exemple, soit p un type à support fini sur N, $\phi(v_0)$ une formule à paramètres dans N, et supposons que $\phi[N[p]] = \phi[N]$. Si a réalise p et b satisfait ϕ (a et b dans une extension de N), $t(b/N[a])$ est le cohéritier de $t(b/N)$, donc $t(a/N[b])$ est l'héritier de $t(a/N)$, et p est orthogonal à tout type contenant $\phi(x)$.

3.8. PROPOSITION. *Soient $p, q, r \in S(M)$, r non algébrique, $p \geqslant r$, $q \geqslant r$. Alors p et q ne sont pas orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. On peut trouver a, b, c réalisant, respectivement, p, q, r avec $c \in M[a] \cap M[b]$. Donc pour des termes f et g, à paramètres dans M, on a $f(a) = g(b) = c$ et il n'existe pas d'éléments $m \in M$ tels que $f(a) = g(m)$. Donc $t(a/M[b])$ n'est pas héritier de $t(a/M)$. ■

3.9. PROPOSITION. *Soient p et q des types R. K.-minimaux sur M; alors p et q ne sont pas R. K.-équivalents si et seulement s'ils sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Un sens est donné la Proposition 3.8. Supposons que p et q ne sont pas R. K.-équivalents, et que, par exemple, $\mathrm{CB}(p) \geqslant \mathrm{CB}(q)$. Soit $\psi(x)$ une formule isolant q; dans $M[p] - M$, seuls des types sur M dont le rang est égal à $\mathrm{CB}(p)$ sont réalisés, donc $\psi[M[p]] = \psi[M]$, et q est orthogonal à p. ■

3.10. PROPOSITION. *Soient $p \in S_1(M)$, et p' son héritier sur $M' \succ M$ et $\phi(v_0)$ une formule à paramètres dans M. Supposons $\phi[M[p]] = \phi[M]$. Alors $\phi[M'[p']] = \phi[M']$.*

DÉMONSTRATION. Soit d un schéma définissant p et p' comme dans la Proposition 3.5. Alors pour tout terme $f(v_0, \bar{v})$, et toute suite $\overline{m}$ de M de longueur convenable, il existe $m_1 \in M$ tel que $\phi(f(x, \bar{m})) \in p$ implique $f(x, \bar{m}) = m_1 \in p$. Donc

$$M \models \forall \bar{v} \exists v_1 (d(\phi(f(x, \bar{v}))) \to d(f(x, \bar{v}) = v_1)).$$

Les mêmes formules sont vraies dans M' et cela montre que $\phi[M'[p']] = [M']$. ■

3.11. PROPOSITION. *Soient p et q deux types R. K.-minimaux sur M, p' et q' leurs héritiers sur $M' \succ M$. Alors p et q sont R. K.-équivalents si et seulement si p' et q' le sont.*

DÉMONSTRATION. Supposons $p \sim q$ et réalisons p' en a. Alors q est réalisé dans $M[a]$ par b, et on voit facilement que $t(b/M') = q'$.

Réciproquement, supposons p et q orthogonaux, et par exemple, $\mathrm{CB}(p) \geqslant \mathrm{CB}(q)$; soit ϕ une formule isolant q; alors $\phi[M[p]] = \phi[M]$, et donc $\phi[M'[p']] = \phi[M']$, et p' et q' sont orthogonaux. ■

3.12. PROPOSITION. *Soient q et p_i (pour $i \in I$) des types à support fini sur N, R. K.-minimaux, et $i \to n(i)$ une application de I dans ω. Alors si q est réalisé dans $N[p_i^{n(i)}; i \in I]$, q est R.K.-équivalent à l'un des p_i.*

DÉMONSTRATION. On voit d'abord que

$$N\left[p_i^{n(i)}, i \in I\right] = \bigcup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \left\{N\left[p_i^{n(i)}; i \in J\right]\right\}$$

et qu'il suffit donc de montrer la proposition lorsque I est fini. Dans ce cas, il existe un modèle $M \prec N$, de type fini, tel que q est l'héritier de $q \upharpoonright M$ et chacun des p_i est aussi héritier de $p_i \upharpoonright M$.

Supposons que q n'est R. K.-équivalent à aucun des p_i; alors (3.11 et 3.9) $q \upharpoonright M$ est orthogonal à chacun des $p_i \upharpoonright M$, et donc q est orthogonal à chacun des p_i. Il est alors facile de voir, par récurrence sur $\Sigma_{i \in I} n(i)$ que q n'a au'une seule extension sur $N[p_i^{n(i)}; i \in I]$, et donc n'est pas réalisé dans ce modèle. ■

COROLLAIRE. *S'il existe une famille infinie $(p_i, i \in I)$ de types R. K.-minimaux sur M, deux à deux orthogonaux, alors T a $2^{\aleph_0}$ modèles.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que nous supposons M finiment engendré. Il suffit donc de trouver $2^{\aleph_0}$ extensions de M, deux à deux non M-isomorphes. On peut donc prendre $\{M[p_i; i \in S]; S \subseteq I\}$. ■

3.13. PROPOSITION. *Soient $p \in S_1(M)$, p' son héritier sur $M' \succ M$, et supposons (p, ϕ) régulier. Soit $q \in S(M')$, $q \neq p'$ et $\phi(x) \in q$; alors q et p' sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Il existe une formule $\psi(x)$ à paramètres dans M' appartenant à q mais pas à p'. Puisque (p', ϕ) est régulier (Proposition 3.5), $(\phi \wedge \psi)[M'[p']] = (\phi \wedge \psi)[M']$, et q est orthogonal à p'. ■

On est conduit à la définition:

DÉFINITION. *Soit $p \in S_1(N)$. On dit que p est régulier si p est à support fini et si pour tout $M' \succ N$, et $q \in S(M')$ extension de p, q non égal à l'héritier p' de p sur M', q et p' sont orthogonaux.*

Donc

COROLLAIRE. *Si $p \in S_1(M)$ est R. K.-minimal, il est régulier, ainsi que tous ses héritiers.*

3.14. Nous supposerons à partir de maintenant, et jusqu'à la fin de §6 que la condition (2) de l'introduction (c'est-à-dire l'équivalence entre les notions d'héritier et de cohéritier pour les types sur les modèles de type fini) est vérifiée.

Les types réguliers se prêtent bien à la définition d'une dimension. Supposons $p \in S(N)$, p régulier, et soient $N' \succ N$ et $A \subset N'$ un ensemble de points qui tous réalisent p. Considérons la relation de N-dépendance parmi les éléments de A: pour $A_0 \subset A$, définissons $\mathrm{Cl}(A_0) = \{a \in A;\ t(a/N[A_0])$ n'est pas l'héritier de $p\}$. Alors

(1) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A_0)) = \mathrm{Cl}(A_0)$. Soit $b \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A_0))$ et n le plus petit entier, supposé non nul pour obtenir une contradiction, telle qu'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathrm{Cl}(A_0)$ avec $b \in \mathrm{Cl}(A_0 \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$. Donc $t(b/N[A_0 \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}])$ est l'héritier de p, alors que $t(a_n/N[A_0 \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}])$ ne l'est pas. Puisque p est régulier, $t(b/N[A_0 \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}])$ est l'héritier de p, ce qui constitue une contradiction.

(2) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de A, N-indépendants et $b \in \mathrm{Cl}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; considérons le plus petit entier i tel que $b \in \mathrm{Cl}(a_1, a_2, \ldots, a_i)$. Alors par symétrie, $a_i \in \mathrm{Cl}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b)$, et $a_{i+1} \notin \mathrm{Cl}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b)$ (sinon, par (1) $a_{i+1} \in \mathrm{Cl}(a_1, a_2, \ldots, a_i)$); on montre ainsi de proche en proche que $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ est un ensemble N-indépendant.

(3) On a donc un "principe d'échange" et il en découle que deux sous-ensembles de A, N-indépendants, maximaux, ont même cardinalité.

3.15. PROPOSITION. *Soient $(p_i;\ i \in I)$ un ensemble de types sur N, à support fini, R. K.-minimaux et deux à deux orthogonaux, et $i \to n(i)$ une application de I dans ω. Supposons que $N' = N[p_i^{n(i)};\ i \in I]$ est N-isomorphe à $N[q_j^{m(j)}; j \in J]$, où les q_j sont aussi à support fini, R. K.-minimaux, et deux à deux orthogonaux. Alors il existe une bijection $f\colon I \to J$ telle que, pour tout $i \in I$, p_i et $q_{f(i)}$ sont R. K.-équivalents, et $n(i) = m(f(i))$.*

DÉMONSTRATION. Fixons $i \in I$; il existe $j \in J$ tel que p_i et q_j sont R. K.-équivalents (Proposition 3.12). Il n'en existe qu'un seul d'après l'orthogonalité des q_j. Soit donc $f(i)$ ce point j.

L'application $f\colon I \to J$ ainsi définie est injective parce que les p_i sont deux à deux orthogonaux, et surjective parce que tous les q_j sont réalisés dans N'.

Maintenant il est clair que $q_{f(i)}^{n(i)}$ est réalisé dans $N[p_i^{n(i)}]$ donc dans N'; mais

$$N' = N\left[q_{f(i)}^{m(f(i))}\right]\left[q_j^{m(j)}; j \in J, j \neq f(i)\right]$$

et par conséquent l'héritier de $g_{f(i)}$ sur $N[q_{f(i)}^{m(f(i))}]$ n'est pas réalisé dans N' et $m(f(i))$ est la cardinalité d'un ensemble maximal indépendant de points de N' réalisant $q_{f(i)}$; d'après 3.14, $n(i) \leqslant m(f(i))$; pour une raison symétrique $n(i) \geqslant m(f(i))$, et $n(i) = m(f(i))$. ■

4. Suites régulières.

4.1. DÉFINITION. *On dit que la suite* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *est régulière sur* M *ou* M*-régulière, si pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t(a_i/M[a_1, \ldots, a_{i-1}])$ *est R. K.-minimal.*

Notre but, dans la première partie de cette section est de montrer que tout type sur M est R. K.-équivalent au type d'une suite M-régulière.

4.2. PROPOSITION. *Soit* $M' \underset{+}{\succ} M$. *Alors il existe* $a \in M'$ *dont le type sur* M *est R. K.-minimal.*

Une autre façon d'exprimer ce fait est de dire que pour tout type non algébrique sur M, il y a un type R. K.-minimal qui lui est inférieur.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in M' - M$ de rang de Cantor-Bendixson minimal. Alors pour tout $b \in M[a] - M$, $\mathrm{CB}(b/M) = \mathrm{CB}(a/M)$ et $M[b] = M[a]$. ■

4.3. PROPOSITION. *Supposons qu'il existe un point* b *et un ensemble* $(a_i;\ i \in \omega)$ *infini, indépendants dans* $M[b] - M$. *Alors* T *a* $2^{\aleph_0}$ *modèles dénombrables.*

DÉMONSTRATION. Sans rien changer à leur indépendance, on peut remplacer chacun des a_i par n'importe quel point de $M[a_i] - M$. On peut donc supposer que $t(a_i/M)$ est R. K.-minimal pour tout i.

Supposons que T a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles. Alors (Corollaire à 3.12) il existe un type p sur M et un sous-ensemble infini J de ω tel que, pour tout $i \in J$, $t(a_i/M) \sim p$. On peut donc encore supposer que $t(a_i/M) = p$ pour tout $i \in J$. Alors $\{a_i;\ i \in J\}$ est un ensemble indiscernable.

D'autre part pour tout $i \in J$, il existe un terme f_i à paramètres dans M tel que $f_i(b) = a_i$; soit σ une permutation de J; considérons l'ensemble de formules à paramètres dans $M' = M[a_i;\ i \in J]$: $A_\sigma = \{f_i(x) = a_{\sigma(i)};\ i \in J\}$. Nous avons là des ensembles consistants mais si $\sigma \neq \sigma'$, $A_\sigma \cup A_{\sigma'}$ est inconsistant. On trouve donc $2^{\aleph_0}$ types sur M' et donc autant sur $M[b]$, ce qui est contradictoire. ■

4.4. PROPOSITION. *Soit* $M[b]$ *une extension de* M *par un nombre fini d'éléments. Alors il existe une suite* M*-régulière* $(a_1, \ldots, a_n)$ *telle que* $M[b] = M[a_1, \ldots, a_n]$ *dans les deux cas suivants*:

(1) *T est superstable.*

(2) *T a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles.*

DÉMONSTRATION. (1) Supposons d'abord T superstable: on peut construire, si une telle suite finie n'existe pas, une suite infinie $(a_i;\ i \in \omega)$ dont tous les segments initiaux sont M-réguliers. Alors $a_{i+1} \in M[b]$ mais $a_{i+1} \notin M[a_1, a_2, \ldots, a_i]$, et donc $t(b/M[a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}])$ n'est pas l'héritier de $t(b/M[a_1, a_2, \ldots, a_i])$, et ceci pour tout entier $i \in \omega$. Cela contredit la superstabilité de T.

(2) Dans l'autre cas, soit $(a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(n_1))$, un ensemble de points de $M[b]$, M-indépendants dont le type sur M est R. K.-minimal, et maximal pour ces propriétés, et posons $M_1 = M[a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(n_1)]$. Soit maintenant $M_2 = M_1[a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(n_2)]$, où $(a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(n_2))$ est un ensemble de points de $M[b]$, M_1-indépendants, dont le type sur M_1 est R. K.-minimal, et maximal pour ces propriétés et on définit ainsi les suites $(a_k(\cdot))$ et les modèles M_k.

Si pour un entier k, $M_k = M[b]$, alors

$$(a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(n_1), a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(n_2), \\ a_3(1), \ldots, a_k(1), a_k(2), \ldots, a_k(n_k))$$

est la suite régulière cherchée.

Sinon M_k et $a_k(1)$ sont définis pour chaque entier k. Considérons $p_k \in S_1(M[b])$ l'héritier de $t(a_k(1)/M_{k-1})$ sur $M[b]$. Tout d'abord p_k est R.K.-minimal. D'autre part, si $k > k'$, p_k et $p_{k'}$ sont orthogonaux sinon $t(a_k(1)/M_{k-1})$ et $p_{k'} \restriction M_{k-1}$, qui est l'héritier de $t(a_k(1)/M_{k'-1})$ sur M_{k-1} seraient R. K.-équivalents, et dans $M_{k-1}[a_k(1)] - M_{k-1}$, il y aurait un point c tel que $t(c/M_{k-1}) = p_{k'} \restriction M_{k-1}$, et ceci contredirait la maximalité de la suite $(a_{k'}(1), a_{k'}(2), \ldots, a_{k'}(n_{k'}))$.

Maintenant, le Corollaire à 3.12 nous affirme l'existence de $2^{\aleph_0}$ modèles. ■

Dans les Propositions 4.5 et 4.6, nous supposerons les conclusions de la Proposition 4.4 vérifiées. Cependant, nous pourrions les démontrer avec seulement nos hypothèses générales au prix de quelques complications: il suffirait de considérer des suites régulières infinies.

4.5. PROPOSITION. *Soit $p \in S(M)$ un type R. K.-minimal, et supposons que p n'est pas réalisé dans $M' \succ M$. Alors p n'a qu'une seule extension sur M'.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer la proposition dans le cas où M' est finiment engendré au-dessus de M; on peut donc écrire $M' = M[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ où $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une suite M-régulière. Posons $M_i = M[a_1, a_2, \ldots, a_i]$, et voyons par récurrence sur i que p n'a qu'une seule extension sur M_i; le cas $i = 0$ est vide; traitons le cas $i + 1$: par hypothèse de récurrence, p n'a qu'une seule extension p_i sur M_i qui est son héritier. Or p_i n'est pas réalisé dans $M_i[a_{i+1}] = M_{i+1}$, donc p_i est orthogonal à $t(a_{i+1}/M_i)$ (Proposition 3.9) et p_i n'a qu'une seule extension sur M_{i+1}. ■

COROLLAIRE. *Soient $p, q \in S(M)$, p R. K.-minimal. Alors p n'est pas orthogonal à q si et seulement si $p \leqslant q$.*

4.6. PROPOSITION. *Soient $p, q \in S(M)$, p' et q' leurs héritiers sur $M' \succ M$. Alors p et q sont orthogonaux si et seulement si p' et q' le sont.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que p' et q' sont orthogonaux. Soient a et b réalisant, respectivement, p et q au-dessus de M. Il s'agit de montrer que a et b sont M-indépendants. Soient a_1 et b_1 tels que $t(a_1, b_1/M')$ est l'héritier de $t(a, b/M)$. Alors $t(a_1/M') = p'$, $t(b_1/M') = q'$ et par conséquent $t(a_1/M'[b_1])$ est l'héritier de p' et aussi celui de p. Donc a_1 et b_1 sont M-indépendants, ainsi que a et b puisque $t(a, b/M) = t(a_1, b_1/M)$.

Pour se convaincre de l'implication dans l'autre sens, il faudra lire deux fois le raisonnement qui suit, la première en supposant p R. K.-minimal, la seconde en supposant la proposition vraie lorsque l'un des types p ou q est R. K.-minimal.

Soient donc a et b réalisant, respectivement, p' et q' sur M'. On peut trouver une suite $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ M-régulière telle que $M[b] = M[b_1, b_2, \ldots, b_n]$. Il est clair que pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t(a/M[b_1, b_2, \ldots, b_i])$ est l'héritier de p et n'a qu'une seule extension sur $M[b_1, b_2, \ldots, b_{i+1}]$, et donc il est orthogonal à $t(b_{i+1}/M[b_1, b_2, \ldots, b_i])$.

Mais, $t(b_1, b_2, \ldots, b_n/M')$ est l'héritier de $t(b_1, b_2, \ldots, b_n/M)$, et en utilisant symétrie et transitivité du forking, on voit sans peine que $t(b_{i+1}/M'[b_1, b_2, \ldots, b_i])$ est l'héritier de $t(b_{i+1}/M[b_1, b_2, \ldots, b_i])$, et donc que la suite $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est M'-régulière. Alors $t(a/M')$ est orthogonal à $t(b_1/M')$ (Proposition 3.11 en première lecture, conclusion de la première lecture en seconde lecture) et de plus, $t(a/M'[b_1])$ qui est l'héritier de $t(a/M[b_1])$ est orthogonal à $t(b_2/M'[b_1])$, et ainsi de suite. Nous en déduisons que $t(a/M'[b_1, b_2, \ldots, b_n]) = t(a/M'[b])$ est l'héritier de p. ■

4.7. Proposition. *Soient $p \in S(M)$, p' son héritier sur $M' \succ M$ et a réalisant p'; supposons que la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est M-régulière et que $M[a_1, a_2, \ldots, a_n] = M[a]$. Soient d'autre part, pour chaque $i \in I$, $q_i \in S(M')$, q_i à support fini et q_i R. K.-minimal et supposons les q_i deux à deux orthogonaux et $q_i \leqslant p'$ pour tout $i \in I$. Alors $\|I\| \leqslant n$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons $\|I\| = n + 1$. Il existe un modèle M'', de type fini, $M \prec M'' \prec M'$ tel que les q_i ne bifurquent pas au-dessus de M''. Par conséquent, les $q_i \restriction M''$ sont R. K.-minimaux et deux à deux orthogonaux. Pour chaque $i \in I$, il existe $b_i \in M'[a]$ réalisant q_i.

Posons, pour chaque k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $M_k = M[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ et définissons de même M_k' et M_k''. On doit d'abord remarquer que $t(a_{k+1}/M_k')$ est l'héritier de $t(a_{k+1}/M_k)$, et donc la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est régulière au-dessus de M' et de M''.

Maintenant, on voit qu'il doit exister un entier k, $k < n$ et $i \neq j \in I$ tels que les types de b_i et b_j sur M_k' ne bifurquent pas au-dessus de M' (et de M'') mais que leurs types au-dessus de M_{k+1}' bifurquent au-dessus de M'. Alors $t(b_i/M_k'')$ et $t(b_j/M_k'')$ sont les héritiers de $q_i \restriction M''$ et $q_j \restriction M''$, et sont donc R. K.-minimaux et orthogonaux; mais $t(a_{k+1}/M_k')$ et $t(b_i/M_k')$ ne sont pas orthogonaux, et donc $t(a_{k+1}/M_k'') \sim t(b_i/M_k'')$. La même chose est vraie pour $t(a_{k+1}/M_k'')$ et $t(b_j/M_k'')$ et on a une contradiction. ■

5. Suites régulières de longueur 2. Notre but dans cette section est de montrer:

5.1. Théorème. *Soient (a_1, a_2) une suite M-régulière et b_1 tel que $t(b_1/M[a_1, a_2])$ est l'héritier de $t(a_1/M)$. Supposons encore qu'il n'y a pas dans $M[a_1, a_2, b_1]$ de point b_2 tel que $t(a_1, b_1, a_2) = t(b_1, a_1, b_2)$. Alors T a $2^{\aleph_0}$ modèles.*

Le modèle M est supposé, comme toujours, être de type fini. On peut donc supposer qu'il s'agit du modèle premier. D'autre part, une autre caractérisation du point b_2 est donnée par les conditions:

$$t(a_1, a_2/M) = t(b_1, b_2/M)$$

et

$$t(b_2/M[a_1, b_1]) \text{ ne bifurque pas au-dessus de } M[b_1].$$

5.2. Soit (a_1, a_2) une suite M-régulière. Alors nous affirmons qu'une des trois possibilités a lieu:

Cas 1. Il existe $a_3 \in M[a_1, a_2] - M$ tel que a_1 et a_3 sont M-indépendants.

Dans ces conditions, $M[a_1, a_3] \neq M[a_1]$, donc $M[a_1, a_3] = M[a_1, a_2]$, et $t(a_3/M[a_1])$ est R. K.-minimal. Il en découle (Proposition 3.6) que $t(a_3/M)$ est R. K.-minimal.

Cas 2. Pour tout $a_3 \in M[a_1, a_2] - M[a_1]$, $M[a_3] = M[a_1, a_2]$.

Cas 3. Il existe $a_3 \in M[a_1, a_2] - M[a_1]$ tel que $t(a_3/M[a_1])$ est une extension bifurquante de $t(a_1/M)$.

Supposons que nous ne nous trouvons ni dans le premier cas ni dans le second. Il existe un point $a_4 \in M[a_1, a_2] - M[a_1]$ tel que $M[a_4] \neq M[a_1, a_2]$, et $M[a_1, a_4] = M[a_1, a_2]$. Par conséquent $a_1 \notin M[a_4]$, et $M[a_4] \cap M[a_1]$ est un sous-modèle propre de $M[a_1]$, donc égal à M.

Mais a_1 et a_4 ne sont pas M-indépendants, donc $t(a_1/M)$ est réalisé dans $M[a_4]$ (Proposition 3.9) par un point a_3 qui remplit les conditions du troisième cas.

5.3. Eliminons le premier cas: supposons que la suite (a_1, a_2) du Théorème 5.1 satisfait aux conditions du premier cas. Dans ces conditions, on voit facilement que $\{a_1, a_3, b_1\}$ est un ensemble M-indépendant, et par conséquent $t(a_1, a_3/M) = t(b_1, a_3/M)$. Or a_2 est de la forme $f(a_1, a_3)$, et

$$t(b_1, f(b_1, a_3)/M) = t(a_1, f(a_1, a_3)/M) = t(a_1, a_2/M).$$

Posons $b_2 = f(b_1, a_3)$. Reste à voir que $t(b_2/M[a_1, b_1])$ est héritier de $t(b_2/M[b_1])$, ou d'une façon équivalente que $t(a_1/M[b_1, b_2])$ est héritier de $t(a_1/M[b_1])$. Mais $M[b_1, b_2]$ est inclus dans (en fait égal à) $M[b_1, a_3]$ et nous savons donc que $t(a_1/M[b_1, b_2])$ est l'héritier de $t(a_1/M)$.

5.4. On se place donc dans les deux autres cas. Nous allons nous attacher à trouver: soit le point b_2, soit $2^{\aleph_0}$ modèles. Dans le troisième cas, grâce à un argument analogue à celui qui précède, on voit qu'il est équivalent de trouver un point b_3 dans $M[a_1, a_2, b_1]$, indépendant avec a_1 au-dessus de $M[b_1]$ et tel que $t(a_1, a_3/M) = t(b_1, b_3/M)$.

Pour faire la construction qui va suivre simultanément dans les Cas 2 et 3, nous rebaptisons le point a_2 du Cas 2 et l'appelons a_3.

Posons $p = t(a_1/M)$ et soit ϕ tel que (p, ϕ) est régulier.

5.5. Construisons une suite $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0, \ldots)$ de points M-indépendants qui tous réalisent p; cette suite est donc indiscernable. Puis pour chaque $n > 0$, nous construisons une suite $(c_n^1, c_n^2, \ldots, c_n^k, \ldots)$ telle que:

(1) Pour tout $k > 0$, $t(c_n^0, c_n^k/M) = t(a_1, a_3/M)$.

(2) Pour tout $k > 0$, $t(c_n^k/M[c_m^j;\ m > 0, j \geqslant 0, (m, j) \neq (n, k)])$ est l'héritier de $t(c_n^k/M[c_n^0])$.

Ainsi pour chaque $n > 0$, les suites $(c_n^k;\ k > 0)$ sont des suites de Morley au-dessus de $M[c_m^0;\ m > 0]$ et l'ensemble $\{c_n^k;\ k > 0,\ n > 0\}$ est indépendant au-dessus de ce même modèle.

Remarquons maintenant que $t(c_1^0, c_2^0, c_1^1/M) = t(c_2^0, c_1^0, c_2^1/M) = t(a_1, b_1, a_3)$. Donc $t(c_1^1/M[c_1^0, c_2^0])$ et $t(c_2^1/M[c_1^0, c_2^0])$ sont R. K.-minimaux et de plus la non existence du point b_3 cherché dans le paragraphe 5.4 est exactement équivalent à l'orthogonalité de ces deux types. Pour tout $n > m$, ce fait est encore équivalent à l'orthogonalité de $t(c_n^1/M[c_n^0, c_m^0])$ et $t(c_m^1/M[c_n^0, c_m^0])$ (par isomorphisme).

Nous supposerons donc ces types orthogonaux, et allons construire $2^{\aleph_0}$ modèles: soit s une application de ω dans ω. Posons

$$M_s = M\left[c_n^k;\, n > 0, 0 \leqslant k \leqslant s(n)\right].$$

5.6. LEMME. *Soient $M \prec M'$, M' de type fini, et (d_1^0, d_1^1) réalisant l'héritier de $t(c_1^0, c_1^1/M)$ sur M'. Soient $q \in S(M')$ et q_1 son héritier sur $M'[d_1^0]$. Alors q_1 et $t(d_1^1/M'[d_1^0])$ sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Construisons des points d_n^0 et d_n^1 $(n > 0)$ de telle sorte que $t((d_n^0;\, n > 0)^\frown(d_n^1;\, n > 0)/M')$ est l'héritier de $t((c_n^0;\, n > 0)^\frown(c_n^1;\, n > 0)/M)$. On voit alors que pour $n > m$, $t(d_n^1/M[d_n^0, d_m^0])$ et $t(d_m^1/M[d_n^0, d_m^0])$ sont orthogonaux, et (Proposition 3.11) les types $t(d_n^1/M'[d_m^0;\, m > 0])$ $(n > 0)$ sont deux à deux orthogonaux.

Soit q_1' l'héritier de q_1 sur $M'[d_m^0;\, m > 0]$; alors si q_1 et $t(d_1^1/M'[d_1^0])$ ne sont pas orthogonaux, il en est de même de q_1' et $t(d_1^1/M'[d_m^0;\, m > 0])$ (Proposition 3.11) et aussi de q_1' et $t(d_n^1/M[d_m^0;\, m > 0])$ (par isomorphisme). Ceci contredit la Proposition 4.7. ■

5.7. Nous nous plaçons maintenant, jusqu'au paragraphe 5.8 dans le troisième cas. Fixons l'application $s\colon \omega \to \omega$, et pour chaque $n > 0$ posons

$$M_n = M\left[c_m^k;\, 0 < m \leqslant n;\, 0 \leqslant k \leqslant s(m)\right].$$

Donc les M_n forment une chaîne élémentaire dont la réunion est M_s.

LEMME. *Soit $d \in M_{n+1} - M_n$ satisfaisant ϕ; alors $t(d/M_n)$ est l'héritier de p.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire. Alors (Proposition 3.13) d et c_{n+1}^0 sont indépendants au-dessus de M_n. D'autre part, d et la suite $(c_{n+1}^k;\, 0 \leqslant k \leqslant s(n+1))$ ne sont évidemment pas M_n-indépendants. Soit donc j le plus grand entier tel que d et $(c_{n+1}^k;\, 0 \leqslant k \leqslant j)$ sont M_n-indépendants. Alors d et c_{n+1}^{j+1} ne sont pas indépendants au-dessus de $M_n[c_{n+1}^k;\, 0 \leqslant k \leqslant j]$ et donc leur type au-dessus de ce modèle ne sont pas orthogonaux, pas plus que (Proposition 4.6) $t(d/M_n[c_{n+1}^0])$ et $t(c_{n+1}^{j+1}/M_n[c_{n+1}^0]) = t(c_{n+1}^1/M_n[c_{n+1}^0])$, ce qui contredit le Lemme 5.6. ■

5.7.1. LEMMA. *Soient $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des points de M_s qui tous satisfont ϕ; supposons de plus que $d_1 \in M_{n+1} - M_n$, et que pour tout i, $2 \leqslant i \leqslant k$, d_1 et d_i ne sont pas M-indépendants. Alors $t(d_1, d_2, \ldots, d_k/M_n)$ ne bifurque pas au-dessus de M.*

DÉMONSTRATION. D'abord, le lemme précédent nous montre que chacun des d_i est dans $M_{n+1} - M_n$; nous raisonnons par récurrence sur k, le cas $k = 1$ n'étant autre que le lemme précédent. Traitons le cas $k + 1$:

Nous voyons que $t(d_{k+1}/M[d_1, \ldots, d_k])$ est une extension bifurquante de p, donc orthogonal à $t(c_m^0/M[d_1, d_2, \ldots, d_k])$ pour chaque $m \leqslant n$; il en découle que $t(d_{k+1}/M[d_1, d_2, \ldots, d_k, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0])$ ne bifurque pas au-dessus de $M[d_1, d_2, \ldots, d_k]$. D'après le Lemme 5.6, pour chaque m et j, $0 \leqslant m \leqslant n$, $0 < j \leqslant s(n)$, les types de d_{k+1} et de c_m^j au-dessus de $M[d_1, d_2, \ldots, d_k, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0]$ sont orthogonaux, et puisque les c_m^j sont indépendants au-dessus de ce modèle, on voit sans peine que $t(d_{k+1}/M_n[d_1, d_2, \ldots, d_k])$ est héritier de $t(d_{k+1}/M[d_1, d_2, \ldots, d_k])$. ■

5.7.2. LEMME. *Supposons l'application s croissante et soit* $(d_0, d_1, \ldots, d_k)$ *dans* M_n *telle que* $t(d_0, d_1, \ldots, d_k/M) = t(c_1^0, c_1^1, \ldots, c_1^k/M)$. *Alors*:

(1) $k \leqslant s(n)$;

(2) *si* $d_0 \notin M[c_j^i;\ 0 \leqslant i \leqslant s(j),\ m < j \leqslant n]$ *alors* $k \leqslant s(m)$ *et aucun des* d_i *n'est dans ce modèle.*

DÉMONSTRATION. Pour montrer (1), considérons l'entier $h < n$ tel que $d_0 \in M_{h+1} - M_h$. Alors, par 5.7.1, tous les d_i sont dans $M_{h+1} - M_h$, et $t(d_0, \ldots, d_k/M_h) = t(c_{h+1}^0, c_{h+1}^1, \ldots, c_{h+1}^k/M_h)$; donc

$$t(d_0, \ldots, d_k/M_h) \leqslant t\left(c_{h+1}^0, c_{h+1}^1, \ldots, c_{h+1}^{s(h+1)}/M_h\right),$$

et cela implique que $k \leqslant s(h+1) \leqslant s(n)$ (Propositions 2.4 et 2.5).

Posons $\bar{c} = (c_j^i;\ 0 \leqslant i \leqslant s(j),\ m < j \leqslant n)$, et pour chaque $h \leqslant m$,

$$M_h' = M[\bar{c}]\left[c_j^i;\ 0 \leqslant i \leqslant s(j), 0 < j \leqslant h\right].$$

Soit $l < m$ l'entier tel que $d_0 \in M_{l+1}' - M_l'$. Appliquons le Lemme 5.7.1 auxmodèles obtenus avec l'application s' suivante: $s'(1) = s(m+1)$, $s'(2) = s(m+2), \ldots, s'(n-m) = s(n)$, $s'(n-m+1) = s(1), \ldots, s'(n) = s(m)$. On voit alors que tous les d_i sont $M_{l+1}' - M_l'$, et que $t(d_0, d_1, \ldots, d_k/M_l')$ ne bifurque pas au-dessus de M. Comme précédemment, cela entraîne que $k \leqslant s(l+1) \leqslant s(m)$. ■

5.7.3. LEMME. *Soient s et s' deux suites croissantes, et supposons* $s \neq s'$. *Alors* M_s *n'est pas isomorphe à* $M_{s'}$.

DÉMONSTRATION. Nous allons voir comment on peut récupérer l'application s, supposée croissante, à partir du modèle M_s.

Pour chaque entier i, considérons M^i le sous-modèle de M_s engendré par $\bigcup\{\{d_0, d_1, \ldots, d_k\};\ t(d_0, d_1, \ldots, d_k/M) = t(c_1^0, c_1^1, \ldots, c_1^k/M);\ k \geqslant i\}$.

Par le lemme précédent:

$$M^i = M\left[c_m^j;\ s(m) \geqslant i; 0 \leqslant j \leqslant s(m)\right].$$

Le plus grand i tel que $M^i = M_s$ est donc égal à $s(1)$; $s(2)$ est le plus grand i tel que $M^i = M^{s(1)+1}$ et plus généralement $s(n)$ est le plus grand i tel que $M^i = M^{s(n-1)+1}$. ■

5.8. Traitons maintenant le second cas.

LEMME. $\phi[M_s] = \phi[M[c_n^0;\ n > 0]]$.

DÉMONSTRATION. Nous voyons d'abord que pour tout $n > 0$, $\phi[M[c_n^0, c_n^1]] = \phi[M[c_n^0]]$, ou, ce qui revient au même, $\phi[M[a_3]] = \phi[M[a_1]]$; en effet, pour tout $d \in M[a_3] - M[a_1]$, $M[d] \supsetneq M[a_1]$, donc $\mathrm{CB}(d/M) > \mathrm{CB}(a_1/M)$, ce qui interdit que d satisfasse ϕ.

En utilisant la Proposition 3.10, nous voyons par induction sur le couple (m, k) que

$$\phi\left[M\left[c_n^0; n > 0\right]\left[c_j^i; 0 < i \leqslant k; 0 < j < m\right]\right] = \phi\left[M\left[c_n^0; n > 0\right]\right]$$

et notre assertion en découle. ■

5.8.1. Nous allons maintenant montrer, comme nous l'avons fait dans le troisième cas, que si s et s' sont croissantes et M_s est isomorphe à $M_{s'}$ alors $s = s'$.

En effet, soit f un isomorphisme de $M_{s'}$ sur M_s. Posons $M' = M[c_n^0;\ n > 0]$. Alors $M' = M[\phi[M_s]] = M[\phi[M_{s'}]]$ et f induit un automorphisme de M'. Posons encore $q_n = t(c_n^1/M')$ et $q_n' = t(f(c_n^1)/M')$.

Alors, chacun des q_n est à support fini, R. K.-minimal, et de plus si $n \neq n'$, q_n est orthogonal à $q_{n'}$; la même chose est vraie avec les q_n'. D'autre part, M_s est isomorphe à $M'[q_n^{s(n)};\ n > 0]$ et aussi à $M'[q_n'^{s'(n)};\ n > 0]$. Donc par la Proposition 3.15, s et s' ont la même image et puisqu'elles sont toutes les deux croissantes, $s = s'$.

Le Théorème 5.1 est donc démontré. ■

6. Homogénéité. Le but de cette section est d'étendre le théorème de la section précédente jusqu'à obtenir l'homogénéité de tout modèle de type fini, qui clairement implique l'homogénéité de tout modèle dénombrable. Nous supposerons donc que T a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables.

Convenons de noter $\bar{a}_n$ la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

6.1. Proposition. *Soit $\bar{a}_n$ une suite M-régulière. Alors il existe $M' \succ M$, M' de type fini et une suite $\bar{b}_n$ telle que $t(\bar{a}_n/M')$ est l'héritier de $t(\bar{a}_n/M)$, $\bar{b}_n$ est une suite M'-indépendante de points qui tous réalisent sur M' un type R. K.-minimal (donc $\bar{b}_n$ est M'-régulier) et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $M'[\bar{a}_i] = M'[\bar{b}_i]$.*

Démonstration. Par récurrence sur n; pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons $n = 2$; soit c un point tel que $t(c/M[a_1, a_2])$ est l'héritier de $t(a_1/M)$ et posons $M' = M[c]$. Alors (Théorème 5.1), il existe dans $M'[a_1, a_2]$ un point b tel que $t(c, b/M) = t(a_1, a_2/M)$ et $t(b/M[c, a_1]) = t(b/M'[a_1])$ est l'héritier de $t(b/M')$.

Alors la suite (a_1, b) est M'-régulière, a_1 et b sont M'-indépendants, et $M'[a_1, b]$ est une extension propre de $M'[a_1]$ qui ne peut être égale qu'à $M'[a_1, a_2]$. Nous avons donc satisfait aux exigences de la Proposition 6.1.

Supposons que la proposition vraie pour $n - 1 \geqslant 2$ et montrons-la pour n. Nous avons donc un modèle N et une suite $\bar{b}_{n-1}$ N-indépendante et N-régulière telle que $t(\bar{a}_{n-1}/N)$ ne bifurque pas sur M et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, $N(\bar{b}_i) = N(\bar{a}_i)$. Clairement, on peut exiger en plus que $t(\bar{a}_n/N)$ soit héritier de $t(\bar{a}_n/M)$.

Soit c un point tel que $t(c/N[\bar{a}_n])$ est héritier de $t(b_{n-1}/N)$. Au-dessus de $N[\bar{b}_{n-2}]$, c et b_{n-1} sont indépendants et réalisent le même type. Posons $N' = N(c)$. Alors $t(\bar{a}_n/N')$ ne bifurque pas au-dessus de M et $t(\bar{b}_{n-1}/N')$ ne bifurque pas au-dessus de N.

Il en découle par récurrence sur i ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) que $N'[\bar{a}_i] = N'[\bar{b}_i]$: en effet, $N'[a_i]$ et $N'[b_i]$ sont deux extensions minimales de $N'[\bar{a}_{i-1}] = N'[b_{i-1}]$, et leur intersection, qui contient $N[\bar{a}_i]$ ne peut être que $N'[a_i]$ et $N'[b_i]$.

Maintenant, au-dessus de $N[\bar{b}_{n-2}]$, la suite (b_{n-1}, a_n) est régulière, et en appliquant le Théorème 5.1, on trouve dans $N[\bar{b}_{n-2}][b_{n-1}, a_n, c] = N'[\bar{a}_n]$ un point d tel que $t(c, d/N[\bar{b}_{n-2}]) = t(b_{n-1}, a_n/N[\bar{b}_{n-2}])$ et d et b_{n-1} sont indépendants au-dessus de $N[\bar{b}_{n-2}][c] = N'[\bar{b}_{n-2}]$. On voit alors que la suite $\bar{b}_{n-1}{}^\frown d$ est N'-régulière et que $N'[\bar{a}_n] = N'[\bar{b}_{n-1}, d]$.

D'autre part, $t(d/N'[\bar{b}_{n-2}])$ est R. K.-minimal (parce que son héritier sur $N'[\bar{b}_{n-1}]$ l'est). Donc, la suite $\bar{b}_{n-2}{}^\frown d$ est N'-régulière et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à cette suite, et l'on obtient ainsi un modèle $M' \succ N'$, de type fini et une suite $\bar{d}_{n-1}$.

Remarquons que les b_i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, sont déjà M'-indépendants et on peut remplacer les premiers termes de $\bar{d}_{n-1}$ et supposer que $\bar{d}_{n-2} = \bar{b}_{n-2}$. D'autre part, on peut placer M' de façon à ce que, non seulement $t(\bar{b}_{n-2}{}^\frown d/M')$, mais aussi $t(\bar{b}_{n-1}{}^\frown d/M')$ ne bifurquent pas au-dessus de N'.

Rebaptisons d_{n-1} et appelons le b_n; nous montrons maintenant que la suite $\bar{b}_n$ et le modèle M' satisfont à nos exigences: $N'[\bar{b}_{n-1}{}^\frown d] = N'[\bar{a}_n]$, et donc $t(\bar{a}_n/M')$ ne bifurque pas au-dessus de N', et est donc héritier de $t(\bar{a}_n/M)$; il est déjà clair que pour tout i, $M'[\bar{b}_i] = M'[\bar{a}_i]$ et que la suite $\bar{b}_n$ est M'-régulière. Reste à voir qu'elle est M'-indépendante. En effet, b_{n-1} et d sont $M'[\bar{b}_{n-2}]$-indépendants, donc $t(b_{n-1}/M'[\bar{b}_{n-2}, d]) = t(b_{n-1}/M'[\bar{b}_{n-2}, b_n])$ est l'héritier de $t(b_{n-1}/M'[\bar{b}_{n-2}])$ et cela suffit puisque l'on sait déjà que la suite $\bar{b}_{n-2}{}^\frown b_n$ est M'-indépendante. ∎

6.2. Proposition. *Soient $\bar{a}_n$ et $\bar{b}_{n-1}$ deux suites M-régulières telles que*:

(1) $t(\bar{a}_{n-1}/M) = t(\bar{b}_{n-1}/M)$.

(2) $t(a_n/M[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}])$ *ne bifurque pas au-dessus de* $M[\bar{a}_{n-1}]$.

Alors il existe un point b_n dans $M[\bar{a}_n, \bar{b}_{n-1}]$ tel que

(1) $t(\bar{a}_n/M) = t(\bar{b}_n/M)$.

(2) $t(b_n/M[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}])$ *ne bifurque pas au-dessus de* $M[\bar{b}_{n-1}]$.

Démonstration. Soit $p = t(a_n/M[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}])$ et $q = t(b_n/M[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}])$ où b_n est un point satisfaisant à la conclusion de la proposition. Il est à remarquer que les conditions sur b_n déterminent complètement q, et que p et q sont R. K.-minimaux. Il s'agit de montrer qu'ils sont R. K.-équivalents.

Soit M' une extension de M, de type fini, telle qu'il existe dans $M'[\bar{a}_n]$ une suite $\bar{c}_n$, régulière et indépendante satisfaisant à $M[\bar{c}_i] = M'[\bar{a}_i]$, pour tout i entre 1 et n, et l'on peut aussi supposer que $t(\bar{a}_n{}^\frown \bar{b}_{n-1}/M')$ ne bifurque pas au-dessus de M. Au lieu de montrer que p et q sont équivalents, nous montrerons que p' et q', leurs héritiers sur M', sont R. K.-équivalents (Proposition 3.11). Remarquons que $t(a_n/M'[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}]) = p'$.

Soit b'_n tel que $t(b'_n/M'[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}]) = q'$, c'est-à-dire tel que $t(\bar{b}_{n-1}{}^\frown b'_n/M') = t(\bar{a}_n/M')$ et que $t(b'_n/M'[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}])$ ne bifurque pas au-dessus de $M'[\bar{b}_{n-1}]$.

Maintenant, on voit que $t(b_{n-1}/M'[\bar{a}_n])$ ne bifurque pas au-dessus de $M'[\bar{a}_{n-1}]$ et que $M'[\bar{a}_n] = M'[\bar{a}_{n-1}][c_n]$; donc $t(c_n/M'[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}])$ est l'héritier de

$t(c_n/M'[\bar{a}_{n-1}])$, et donc aussi de $t(c_n/M')$; par conséquent, $t(\bar{a}_{n-1}/M'[c_n]) = t(\bar{b}_{n-1}/M'[c_n])$. D'autre part,

$$t\left(a_n/M'\left[\bar{a}_{n-1}\right]\right) \sim t\left(c_n/M'\left[\bar{a}_{n-1}\right]\right)$$

et par isomorphisme

$$t\left(b'_n/M'\left[\bar{b}_{n-1}\right]\right) \sim t\left(c_n/M'\left[\bar{b}_{n-1}\right]\right).$$

En considérant les héritiers de ces quatre types, nous obtenons

$$p' = t\left(a_n/M'\left[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}\right]\right) \sim t\left(c_n/M'\left[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}\right]\right)$$
$$\sim t\left(b'_n/M'\left[\bar{a}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}\right]\right) = q'. \quad \blacksquare$$

6.3. PROPOSITION. *Soient $\bar{a}_n$ et $\bar{b}_{n-1}$ deux suites M-régulières telles que $t(\bar{a}_{n-1}/M) = t(\bar{b}_{n-1}/M)$. Alors il existe $b_n \in M[\bar{a}_n, \bar{b}_{n-1}]$ tel que $t(\bar{b}_n/M) = t(\bar{a}_n/M)$.*

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par récurrence sur n; traitons d'abord deux cas particuliers:

6.3.1. Supposons $t(b_1/M[\bar{a}_n])$ ne bifurque pas au-dessus de M: on utilise alors la proposition précédente et on construit par récurrence sur $i \leqslant n$ des points b'_i dans $M[b_1, \bar{a}_i]$ $(b'_1 = b_1)$ telle que $t(\bar{b}'_i/M) = t(\bar{a}_i/M)$.

Mais $(b'_2, \ldots, b'_{n-1})$ et $(b_2, \ldots, b_{n-1})$ ont même type au-dessus de $M[b_1]$, et par hypothèse de récurrence, il existe dans $M[\bar{b}_{n-1}, \bar{b}'_n] \subseteq M[\bar{b}_{n-1}, \bar{a}_n]$ un point b_n tel que $t(\bar{b}_n/M) = t(\bar{b}'_n/M)$.

6.3.2. On supposera maintenant que $M[\bar{a}_n, \bar{b}_{n-1}] = M[\bar{a}_{n-1}, b_1] = M'$.

Introduisons un point c_1 dont le type sur M' est l'héritier de $t(a_1/M)$ (et est donc R. K.-minimal).

LEMME. *Il existe dans $M'[c_1]$ le point b_n désiré.*

DÉMONSTRATION. Comme précédemment, on construit une suite $\bar{c}_n$ dans $M[c_1, \bar{a}_n]$ tel que $t(\bar{c}_n/M) = t(\bar{a}_n/M)$; on peut aussi construire une suite $\bar{d}_{n-1}$, avec $d_1 = c_1$, dans $M[c_1, \bar{b}_{n-1}]$ tel que $t(\bar{d}_{n-1}/M) = t(\bar{b}_{n-1}/M)$, et on peut le faire de telle sorte que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $t(d_i/M[\bar{d}_{i-1}, \bar{b}_{i-1}])$ ne bifurque pas au-dessus de $M[\bar{d}_{i-1}]$; alors b_1 et $\bar{d}_{n-1}$ sont M-indépendants. Par hypothèse de récurrence, il existe $d_n \in M[\bar{d}_{n-1}, \bar{c}_n]$ tel que $t(\bar{d}_n/M) = t(\bar{c}_n/M)$. Nous distinguons deux cas:

(1) d_n et b_1 sont indépendants au-dessus de $M[\bar{d}_{n-1}]$; dans ce cas $t(b_1/M[\bar{d}_n])$ ne bifurque pas au-dessus de M, et on peut appliquer 6.3.1.

(2) d_n et b_1 ne sont pas indépendants au-dessus de $M[\bar{d}_{n-1}]$; dans ce cas $t(d_n/M[\bar{d}_{n-1}])$ et $t(b_1/M[\bar{d}_{n-1}])$, qui sont R. K.-minimaux, sont R. K.-équivalents et par conséquent, on pouvait choisir d_n dans $M[b_1, \bar{d}_{n-1}]$. Mais remarquons que $t(b_1{}^\frown\bar{d}_{n-1}/M) = t(d_1{}^\frown\bar{b}_{n-1}/M)$. Donc le point b_n désiré peut être trouvé dans $M[d_1, \bar{b}_{n-1}]$ et nous avons donc terminé la démonstration du lemme.

Supposons donc que le point b_n ne soit pas dans M'. Alors $t(b_n/M') \leqslant t(c_1/M')$, donc ces deux types sont R. K.-minimaux et R. K.-équivalents. D'autre part, on peut supposer que $t(b_n/M')$ ne bifurque pas au-dessus de $M[\bar{b}_{n-1}]$: sinon $t(b_n/M[\bar{b}_{n-1}])$, qui est R. K.-minimal, serait réalisé sans M' (Proposition 4.5) et l'on n'aurait plus rien à faire. Par conséquent, $t(b_n/M[\bar{b}_{n-1}])$ et $t(c_1/M[\bar{b}_{n-1}])$ sont R. K.-minimaux et R. K.-équivalents, et $t(b_n/M[\bar{b}_{n-1}])$ est orthogonal à toute extension bifurquante de $t(c_1/M) = t(a_1/M)$ sur $M[\bar{b}_{n-1}]$ (Proposition 3.13); par isomorphisme, $t(a_n/M[\bar{a}_{n-1}])$ est orthogonal à toute extension bifurquante de $t(b_1/M)$ sur $M[\bar{a}_{n-1}]$.

Utilisons maintenant l'hypothèse que $a_n \in M[a_{n-1}, b_1]$: on voit que $t(b_1/M[a_{n-1}])$ doit être l'héritier de $t(b_1/M)$. On peut alors utiliser la Proposition 6.2 et construire dans M' une suite $\bar{b}'_{n-1}$ avec $b'_1 = b_1$ telle que $t(\bar{b}'_{n-1}/M) = t(\bar{a}_{n-1}/M)$ et $t(a_1/M[\bar{b}'_{n-1}])$ est héritier de $t(a_1/M)$.

Or, il existe dans M' un point b'_n tel que $t(\bar{b}'_n/M) = t(\bar{a}_n/M)$: en effet, le type d'un tel point sur $M[\bar{b}'_{n-1}]$ est R. K.-équivalent à $t(a_1/M[\bar{b}'_{n-1}])$ (par isomorphisme, puisque $t(b_n/M[\bar{b}_{n-1}]) \sim t(c_1/M[\bar{b}_{n-1}])$).

Maintenant, il nous suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au-dessus de $M[b_1]$ avec les suites $(b'_2, b'_3, \ldots, b'_n)$ et $(b_2, b_3, \ldots, b_{n-1})$.

6.3.3. Fin de la démonstration de la Proposition 6.3: par hypothèse de récurrence, on peut construire dans $M[\bar{a}_{n-1}, b_1]$ une suite $\bar{b}'_{n-1}$, avec $b'_1 = b_1$, telle que $t(\bar{b}'_{n-1}/M) = t(\bar{a}_{n-1}/M) = t(\bar{b}_{n-1}/M)$. Distinguons deux cas:

(1) Le type $t(a_n/M[\bar{a}_{n-1}])$ n'est pas réalisé dans $M[\bar{a}_{n-1}, b_1]$. Dans ce cas, $t(a_n/M[\bar{a}_{n-1}, b_1])$ ne bifurque pas au-dessus de $M[\bar{a}_{n-1}]$. On peut alors appliquer la Proposition 6.2 pour trouver dans $M[\bar{a}_n, b_1] \subseteq M'$ un point b'_n tel que $t(\bar{b}'_n/M) = t(\bar{a}_n/M)$.

(2) Il y a dans $M[\bar{a}_{n-1}, b_1]$ un point a'_n tel que $t(a'_n/M[\bar{a}_{n-1}]) = t(a_n/M[\bar{a}_{n-1}])$. On peut alors appliquer 6.3.2, et on trouve $b'_n \in M[\bar{a}_{n-1}, b_1]$ tel que $t(\bar{b}'_n/M) = t(\bar{a}_n/M)$.

Dans un cas comme dans l'autre, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au-dessus de $M[b_1]$. ■

6.4. En corollaire, nous obtenons donc le théorème convoité.

THÉORÈME. *Si T a des fonctions de Skolem et satisfait aux conditions* (1) *et* (2) *de l'introduction, alors tout les modèles dénombrables de T sont homogènes ou bien T a* $2^{\aleph_0}$ *modèles dénombrables.*

7. Commutativité du produit de type.

7.1. Nous supposerons dans cette section que T a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables et que, de plus, tout type au-dessus de tout modèle de type fini est définissable (condition (1) de l'introduction); notre but est de démontrer la condition (2), c'est-à-dire:

(2) Pout tout M, a et b dans une extension de M, si $t(a/M[b])$ est l'héritier de $t(a/M)$, alors $t(b/M[a])$ est l'héritier de $t(b/M)$.

Tout d'abord:

PROPOSITION. *La condition* (2) *est vérifiée lorsque* $t(a/M)$ *et* $t(b/M)$ *sont R. K.-minimaux et non R. K.-équivalents.*

Cela découle immédiatement de la Proposition 3.8.

7.2. Proposition. *Supposons que* $p = t(a_1/M)$ *est R. K.-minimal, et que* $t(a_2/M[a_1])$ *est l'héritier de* p. *Alors* $t(a_1, a_2/M) = t(a_2, a_1/M)$.

Démonstration. Nous allons supposer le contraire et construire $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables. Soit donc $\psi(x_1, x_2)$ une formule à coefficients dans M telle que $\psi(a_1, a_2) \wedge \neg\psi(a_2, a_1)$.

Posons $M_1 = M[a_1]$, $M_2 = M_1[a_2]$, et construisons par induction sur $n > 2$ un point a_n et un modèle M_n tel que $t(a_n/M_{n-1})$ est l'héritier de p et $M_n = M_{n-1}[a_n]$. En utilisant le schéma définissant p, on voit facilement que la suite $(a_n; n \in \omega)$ est indiscernable au-dessus de M.

Soit d'autre part ϕ une formule isolant p; par la Proposition 3.4, (p, ϕ) est régulier, et (Proposition 3.5) si $b \in M_n - M_{n-1}$ et $M \models \phi(b)$, alors $t(b/M_{n-1}) = t(a_n/M_{n-1})$.

Soit maintenant $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné dénombrable. On peut construire une suite $(b_i; i \in I)$, indiscernable au-dessus de M et telle que si $i(1) < i(2) < \cdots < i(n)$ appartiennent à I, $t(b_{i(1)}, b_{i(2)}, \ldots, b_{i(n)}/M) = t(a_1, a_2, \ldots, a_n/M)$.

Pour $J \subseteq I$, nous noterons $M[J] = M[b_i; i \in J]$; $J \subset_i I$ signifiera que J est un segment initial de I.

7.2.1. Lemme. *Soit* $J \subset_i I$ *et* $a \in \phi[M[I]] - M[J]$. *Alors* $t(a/M[J])$ *est l'héritier de* p.

Démonstration. De la définition des suites $(a_n; n \in \omega)$ et $(b_i; i \in I)$ il est clair que, pour tout $i \in I$, $t(b_i/M[b_j; j < i])$ est l'héritier de p. Si $a \in M[I] - M[J]$, il existe une suite d'éléments de I, $i(1) < i(2) < \cdots < i(n)$, tous supérieurs à J telle que $a \in M[J \cup \{i(1), i(2), \ldots, i(n)\}]$ et l'on peut exiger que $a \notin M[J \cup \{i(1), i(2), \ldots, i(n-1)\}] = M'$. Or $(t(b_{i(n)}/M'), \phi)$ est régulier donc $t(a/M')$ est héritier de p, de même que $t(a/M[J])$. ■

7.2.2. Lemme. *Soient* $J \subset_i I$, $a \in M[I] - M[J]$, $a' \in M[J] - M$, *a et* a' *vérifiant* ϕ. *Alors* $M[I] \models \neg\psi(a, a')$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que $t(a'/M) = p = t(b_j/M)$ où j est n'importe quel élément de J. Aussi, $t(a/M[J]) = t(b_i/M[J])$ où i est n'importe quel élément de $I - J$ (donc $i > j$). Alors

$$t(a, a'/M) = t(b_i, b_j/M) = t(a_2, a_1/M)$$

et la conclusion en découle.

7.2.3. Lemme. *Soit* $M' \prec M[I]$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe* $J \subset_i I$ *tel que* $M[J] = M'$.

(ii) $M' = M[\phi[M']]$ *et pour tout* $a \in M[I]$, *si* $a' \in M' - M$ *et* $M[I] \models \phi(a) \wedge \phi(a') \wedge \psi(a, a')$, *alors* $a \in M'$.

DÉMONSTRATION. Le fait que (i) implique (ii) découle immédiatement du Lemme 7.2.2. Supposons donc que (ii) est vrai. Soit $J = \{i; b(i) \in M'\}$. Nous savons que si $i < j$, $M[I] \vDash \psi(b_i, b_j)$, donc, d'après (ii), J est un segment initial de I.

Montrons maintenant que $M' = M[J]$. Il est d'abord clair que $M[J] \subseteq M'$. Supposons par l'absurde que $M[J] \neq M'$. Il y a donc dans M' un élément a qui n'est pas dans $M[J]$, et satisfaisant ϕ (parce que $M' = M[\phi[M']]$). Il y a donc une suite $i(1) < i(2) < \cdots < i(n)$ d'éléments de $I - J$, telle que $a \in M[J \cup \{i(1), i(2), \ldots, i(n)\}]$ mais $a \notin M[J \cup \{i(1), i(2), \ldots, i(n-1)\}] = M''$. On voit alors que $t(a/M'') = t(b_{i(n)}/M'')$ et que pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $M[I] \vDash \psi(b_{i(k)}, a)$ et donc $b_{i(1)}, b_{i(2)}, \ldots, b_{i(n-1)}$ sont dans M'; autrement dit $n = 1$.

Alors $b_{i(n)}$ et a ont le même type au-dessus de $M[J]$, et ce type est R. K.-minimal. On a $a \in M[J][b_{i(n)}]$ donc $b_{i(n)} \in M[J][a] \subseteq M'$ et $i(n) \in J$, contradiction. ■

7.2.4. Soit $\hat{I}$, la complétion de I, l'ensemble $\{J; J \subset_i I\}$ ordonné par inclusion. Le lemme précédent nous montre que $\hat{I}$ est isomorphe à l'ensemble des sous-modèles de $M[I]$ vérifiant (ii). Par conséquent, si $M[I]$ est isomorphe à $M[J]$, alors $\hat{I}$ est isomorphe à $\hat{J}$. Le fait qu'il existe $2^{\aleph_0}$ ordres totaux dénombrables ayant des complétions deux à deux non isomorphes fait partie du folklore mathématique et termine la preuve de la Proposition 7.2. ■

7.3. COROLLAIRE. *La condition* (2) *est vérifiée si* $t(a/M)$ *et* $t(b/M)$ *sont tous deux R. K.-minimaux.*

DÉMONSTRATION. La seul cas qui reste à considérer après 7.1, est le cas où $t(a/M)$ est R. K.-équivalent à $t(b/M)$. Il existe alors dans $M[b]$ un point c tel que $t(a/M) = t(c/M)$ et $t(a/M[c]) = t(a/M[b])$ est héritier de $t(a/M)$. Donc (Proposition 7.2), $t(a/M[b]) = t(a/M[c])$ est cohéritier de $t(a/M)$ et $t(b/M[a])$ est héritier de $t(b/M)$. ■

7.4. Nous pouvons maintenant, à l'aide du Corollaire 7.3, reprendre la démonstration de la Proposition 4.4: tout type sur M est R. K.-équivalent au type d'une suite M-régulière.

PROPOSITION. *La condition* (2) *est vraie en général.*

DÉMONSTRATION. Là encore, il faudra lire la preuve deux fois: la première fois en supposant que $t(b/M)$ est R. K.-minimal, la seconde en supposant la proposition vraie lorsque l'un des deux types est R. K.-minimal.

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite M-régulière telle que $M[a] = M[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, et posons pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $M_i = M[a_1, a_2, \ldots, a_i]$. On remarque que $t(b/M[a])$ est cohéritier de $t(b/M)$, donc de $t(b/M_i)$, et par conséquent $t(a/M_i[b])$ est héritier de $t(a/M_i)$, et $t(a_{i+1}/M_i[b])$ est héritier de $t(a_{i+1}/M_i)$.

Par les propriétés de commutativité que nous connaissons déjà, nous voyons que $t(b/M_i[a_{i+1}]) = t(b/M_{i+1})$ et l'héritier de $t(b/M_i)$, et on conclut que $t(b/M[a])$ est héritier de $t(b/M)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[L1] Daniel Lascar, *Sur les théories convexes modèles complètes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **278** (1974), 1001–1004.

[L2] ______, *Généralisation de l'ordre de Rudin-Keisler aux types d'une théorie*, Colloq. Internat. C.N.R.S., No. 249, Clermont-Ferrand, 1975, pp. 73–81.

[L3] ______, *Les modèles dénombrables d'une théorie superstable ayant des fonctions de Skolem*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **289** (1979), 655–658.

[LP] Daniel Lascar et Bruno Poizat, *An introduction to forking*, J. Symbolic Logic **44** (1979), 330–350.

[S1] Saharon Shelah, *Classification theory*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[S2] ______, *End extensions and the number of countable models*, J. Symbolic Logic **43** (1978), 550–562.

[V] Robert L. Vaught, *Denumerable models of complete theories*, Proc. Sympos. Foundation of Mathematics, Infinite Methods, Pergamon, New York, 1961, p. 303.

CENTRE NATIONAL RECHERCHE SCIENTIFIQUE, UER DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS VII, 75221 PARIS CEDEX 05, FRANCE